Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Transições de fases e fenômenos críticos - PG 01/2016

Prof. Jürgen F. Stilck

1^a Lista de Exercícios
Entrega dia 01/04/10

1) A condição de estabilidade do estado de equilíbrio de um fluido simples implica que a entropia por partícula s seja uma função côncava nas suas variáveis u e v, ou seja:

$$s\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[s(u_1,v_1)+s(u_2,v_2)].$$

Uma matriz $\mathbf{A}$ real simétrica *negativa definida* têm todos os seu autovalores negativos, ou, de maneira equivalente, apresenta os valores esperados $\langle v|A|v\rangle$ negativos para qualquer vetor $|v\rangle$ não nulo.

a) Mostre que a matriz de derivadas segundas de s (hessiano):

$$\begin{pmatrix} s_{u,u} & s_{u,v} \\ s_{v,u} & s_{v,v} \end{pmatrix}$$

é negativa definida nos estados de equilíbrio desde que $s(u,v)$ seja côncava.

b) Mostre que se $C_v > 0$ e $\kappa_T > 0$ o maior autovalor do hessiano de s é negativo e, portanto, s é côncava.

2) Mostre, para um magneto uniaxial, que:

$$C_h = C_m + T\frac{\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_h^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T}.$$

Usando a propriedade de convexidade da energia livre de Helmholtz $f(T,m)$, mostre que $C_m \geq 0$ e, portanto,

$$C_h \geq T \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_h^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T}.$$

3) A equação de estado proposta em 1906 por Berthelot para um gás real é dada por:

$$\left(p + \frac{a}{k_B T v^2}\right)(v - v_0) = k_B T,$$

onde a e v_0 são constantes a serem ajustadas para cada substância.

a) Determine os valores críticos para a temperatura, pressão e volume por partícula para um gás descrito pela equação de Berthelot.

b) Fazendo a suposição adicional de que quando $v \to \infty$ tenhamos $u \to \frac{3}{2} k_B T$, determine a energia livre de Helmholtz do gás $f(T,v)$ a menos de uma constante arbitrária.

c) Fazendo mudanças de variáveis convenientes na energia livre de Helmholtz obtida no item b), mostre que as equações de estado do gás podem ser escritas na forma universal adimensional:

$$\tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\beta}(\tilde{v} - 1)} - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{v}^2},$$

$$\tilde{u} = \frac{3}{2\tilde{\beta}} - \frac{2\tilde{\beta}}{\tilde{v}},$$

onde $\tilde{v} = v/v_0$, $\tilde{\beta} = \sqrt{a/v_0}\,\beta$, $\tilde{u} = \sqrt{v_0/a}\,u$ e $\tilde{p} = \sqrt{v_0^3/a}\,p$.

d) Faça uma expansão da equação de estado de Berthelot na vizinhança do ponto crítico, definindo as variáveis:

$$\pi = \frac{p - p_c}{p_c},$$

$$\omega = \frac{v - v_c}{v_c}$$

e

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}.$$

reescreva e equação nessas novas variáveis expandindo a expressão para π em torno de $t = 0$ e $\omega = 0$. Obtenha uma expressão assintótica para a linha de coexistência em $t \to 0^-$ e mostre que ela é tangente à isocora crítica nesse limite.

4) A magnetização espontânea por spin do modelo de Ising na rede quadrada é dada por:

$$m^8 = 1 - [senh(2J/k_B T)]^{-4}.$$

a) Obtenha a temperatura crítica T_c do modelo.

b) Mostre que podemos escrever a magnetização na forma de escala:

$$m = B(-t)^{\beta}[1 + b(-t) + \ldots],$$

com $t = (T - T_c)/T_c$, obtendo os valores das constantes B e b.

c) Estime a região de temperaturas na qual é razoável ignorar o termo de correção à forma de escala.